ESATIC — ANNÉE ACADÉMIQUE 2025-2026
LOGIQUE — *MP2I*

FICHE DE T D N° 1 :

Exercice 1.
Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication bien connue (parfois sous le nom de «règle du produit nul») $ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$. Pour chacune d'entre elles, donner sa valeur de vérité.

Exercice 2.
Si E désigne l'ensemble des élèves de MP2I, F l'ensemble des livres existants alors on note $P(x, y)$ la proposition «l'individu x a lu le livre y». Traduire par une phrase en français chacune des propositions suivantes (et si ça vous amuse, déterminer sa valeur de vérité).

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
3. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
4. $\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
5. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$

Exercice 3.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en le justifiant. Écrire également sa négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$
5. $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = 1$
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{R}, z \neq x + y$

Exercice 4.
Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables, et soient E et F deux ensembles. Montrer que $(\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$. Que dire de la réciproque ?

Exercice 5.
Soient P, Q, R trois propositions logiques.

1. *Redémontrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg P \vee Q$. Retrouver la négation de $P \Rightarrow Q$.*

2. *Montrer que les assertions (a) et (b) suivantes sont équivalentes :*

   (a) $P \vee Q \Rightarrow R$ *et* $P \Rightarrow R \wedge Q \Rightarrow$*).*

   (b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ *et* $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$*.*

Exercice 6.
Soit x *un réel. Montrer que* $(\forall \epsilon > 0, |x| < \epsilon) \Rightarrow x = 0$*.*

Exercice 7.
Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y > 2 \Rightarrow (x > 1$ *ou* $y > 1)$*. Écrire également la négation de cette proposition, ainsi que la réciproque de l'implication qu'elle contient. Cette réciproque est-elle vraie ?*

Exercice 8.
Soit x *un irrationnel strictement positif. Montrer que* $\sqrt{x}$ *est irrationnel.*

Exercice 9.
Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$*.*

Exercice 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 1, u_1 = 3$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$*.*
Montrer qu'il existe deux réels a *et* b *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a(-1)^n + b2^n$*.*

Exercice 11.
Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 8 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}, n = 3a + 5b$*.*